Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 5

1. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções, e calcule os resíduos correspondentes.

   a) $f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z-\pi}$

   b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2+2)^2}$

   c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)}$

   d) $f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z^2)}$

   e) $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$

2. Considere a função
$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}.$$
Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

3. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor dos integrais
$$\oint_{\gamma_k} g(z) dz,$$
para cada uma das seguintes funções complexas:

   (i) $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, (ii) $g(z) = z^2 \operatorname{sen}(z^{-1})$, (iii) $g(z) = \dfrac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$.

4. Calcule o seguinte integral
$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz,$$
onde C é a elipse $|z - 1| + |z + 1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

5. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mediante a escolha de um contorno de integração adequado, estabeleça os seguintes resultados:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$

   Sugestão: mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx = \frac{(3-\sqrt{3})\pi}{6}$

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{e}$

6. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Define-se o **resíduo de f em** ∞ por:

$$\mathrm{Res}(\mathrm{f}, \infty) = -\mathrm{Res}(\mathrm{F(z)}, 0).$$

   Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \ldots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i\ \mathrm{Res}(\mathrm{f}, \infty).$$